PARTIE 7

Systèmes bouclés

Correcteurs

P.I.D. et Polynômes

A) Correcteurs P.I.D. : Méthode Harmonique

1) Correcteur P.I.

a) Forme générale

Un correcteur P.I. est la somme d'un correcteur proportionnel et d'un terme intégral. Le terme intégral peut prendre l'une de trois formes :

$$I1(z) := \frac{Te}{z-1} \qquad I2(z) := Te\cdot\frac{z}{z-1} \qquad I3(z) := \frac{Te}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1}$$

En combinant un correcteur proportionnel et un terme intégral on arrive à une forme la plus usuelle d'un correcteur P.I. qui est la suivante :

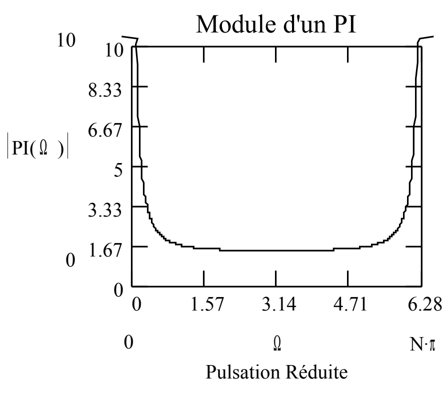
$$\boxed{D(z) := K_p + K_i\cdot\frac{z}{z-1}}$$

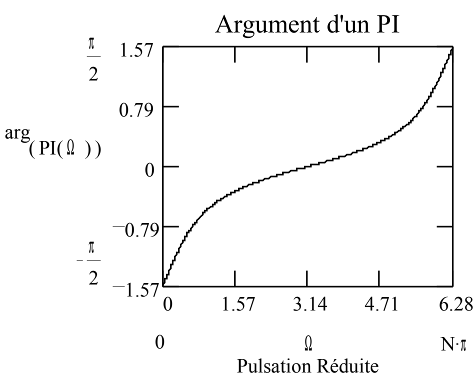
Le terme intégral est lié à la présence du dénominateur "z - 1". On trouve aussi un P.I. sous la forme

$$D(z) := K\cdot\frac{z-A}{z-1} \qquad A := \frac{K_p}{K_p+K_i} \qquad K := K_p + K_i$$

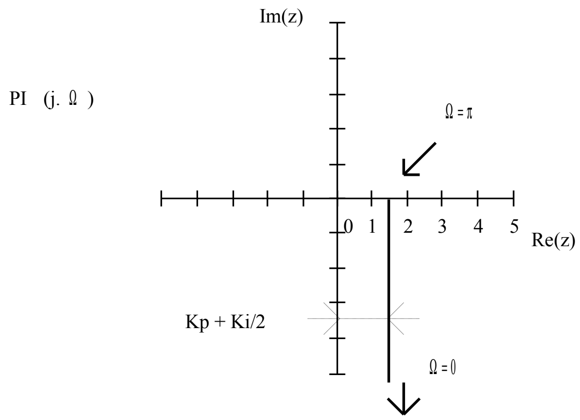
b) Etude Harmonique

Un correcteur P.I. est un filtre numérique. Il est possible de calculer son module et son argument en fonction de la pulsation réduite "Ω". Par exemple si on prend K_p=1 et K_i=1 on a :





Partie réelle et imaginaire d'un PI



On retrouve sur ces courbes les résultats des correcteurs P.I. analogique. En basse fréquence le gain tend vers l'infini et la phase vers $-\pi/2$. En haute fréquence le gain est constant et la phase nulle.

c) Réglage d'un PI numérique.

Si la période d'échantillonnage est petite devant les constantes de temps du système, il est possible de régler le PI numérique comme un système continu.

Supposons que l'on ait déterminé le réglage d'un PI continu pour le système sous la forme suivante :

$$PI(p) := \frac{1 + T_n \cdot p}{T_i \cdot p}$$

Il est possible d'avoir une bonne approximation de z=exp(Te.p) par la formule de "Padé"

$$z := \frac{1 + \frac{Te \cdot p}{2}}{1 - \frac{Te \cdot p}{2}}$$

Connaissant Tn et Ti il est possible de calculer Ki et Kp du correcteur numérique équivalent:

$$\boxed{Ki = Te/Ti \qquad Kp = (Tn - Te/2)/Ti}$$

Dans ces formules on voit apparaître la période d'échantillonnage comme un élément de réglage.

2) Correcteur P.D.

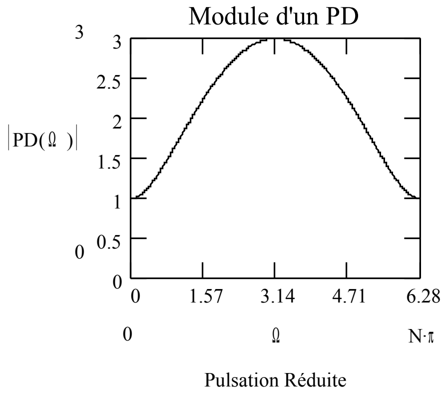
a) Forme générale

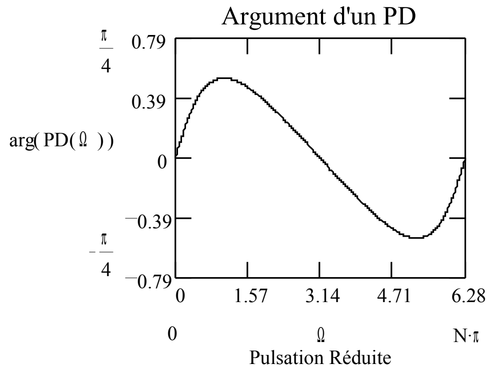
Un correcteur P.D. est un constitué d'un correcteur proportionnel et d'un terme dérivé de la forme :

$$\boxed{D(z) := Kp + Kd \cdot \frac{z - 1}{z}}$$

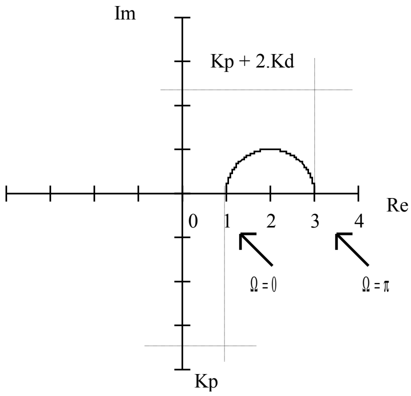
$$D(z) := K \cdot \frac{z - B}{z} \qquad K := Kp + Kd \qquad B := \frac{Kd}{Kp + Kd}$$

b) Etude Harmonique





Partie réelle et imaginaire d'un PD



c) Réglage d'un PD numérique.

Avec les mêmes considérations que pour un régulateur P.I. on arrive a :

$$z := \frac{1 + \frac{Te \cdot p}{2}}{1 - \frac{Te \cdot p}{2}} \qquad D(p) := \frac{Kp + p \cdot \left(Kd + \frac{Kp}{2}\right) \cdot Te}{1 + p \cdot \frac{Te}{2}}$$

Le régulateur continu proportionnel et dérivé de type continu a une fonction de transfert de la forme :

$$\boxed{PD(p) := Kp \cdot (1 + Td \cdot p)}$$

Les deux formes ne sont pas équivalentes. Le gain proportionnel est le même mais le système échantillonné introduit une petite constante de temps Te/2. Cette constante de temps d'une demi période d'échantillonnage peut rendre le système instable. Il faut être vigilant lors de la discussion de la stabilité.

Par identification on peut calculer Kd du correcteur échantillonné.

$$\boxed{Kd := \frac{Td - \frac{Te}{2}}{Te} \cdot Kp}$$

3) Correcteur P.I.D.

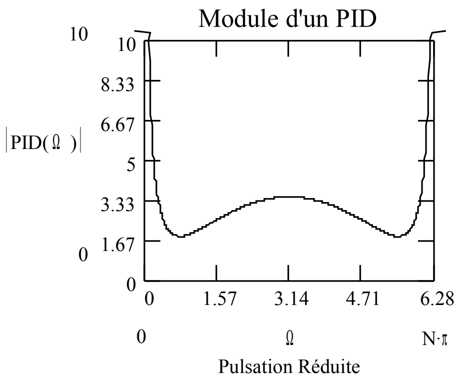
a) Forme générale

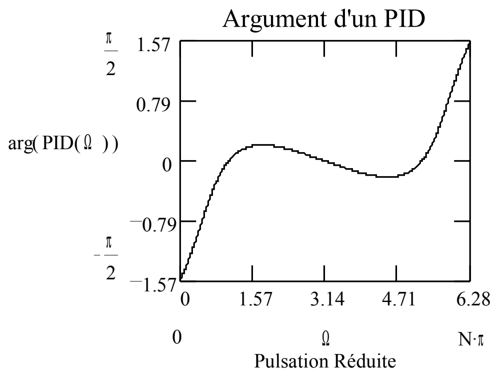
Un correcteur P.D. est un constitué d'un correcteur proportionnel, d'un terme dérivé et d'un terme intégral de la forme :

$$\boxed{D(z) := Kp + Ki \cdot \frac{z}{z-1} + Kd \cdot \frac{z-1}{z}}$$

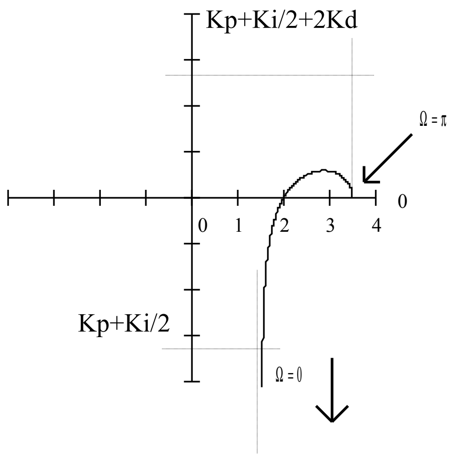
$$D(z) := \frac{A \cdot z^2 + B \cdot z + C}{z \cdot (z-1)} \qquad A := Kp + Ki + Kd \qquad B := -(Kp + 2 \cdot Kd) \qquad C := Kd$$

b) Etude Harmonique





Partie réelle et imaginaire d'un PID



c) Réglage d'un PID numérique.

Avec les mêmes considérations que précédemment on arrive a :

$$z := \frac{1 + \frac{Te \cdot p}{2}}{1 - \frac{Te \cdot p}{2}} \qquad D(p) := Kp + Ki \cdot \frac{1 + \frac{Te \cdot p}{2}}{Te \cdot p} + Kd \cdot \frac{Te \cdot p}{1 + \frac{Te \cdot p}{2}}$$

Il faut identifier avec la forme :

$$\boxed{PID(p) := \frac{(1 + Tn \cdot p) \cdot (1 + Td \cdot p)}{Ti \cdot p}}$$

On arrive a :

$$Ki := \frac{Te}{Ti}$$

$$Kp := \frac{Tn + Td - Te}{Ti}$$

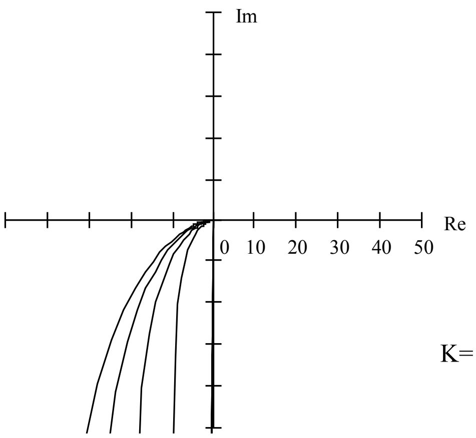
$$Kd := \frac{Tn \cdot Td}{Ti \cdot Te} - \frac{2 \cdot (Tn + Td) - Te}{4 \cdot Ti}$$

CONCLUSION : Le correcteur PID échantillonné introduit une petite constante de temps Te/2. Cette constante de temps peut rendre le système instable. Il faut être vigilant lors de l'étude de la stabilité.

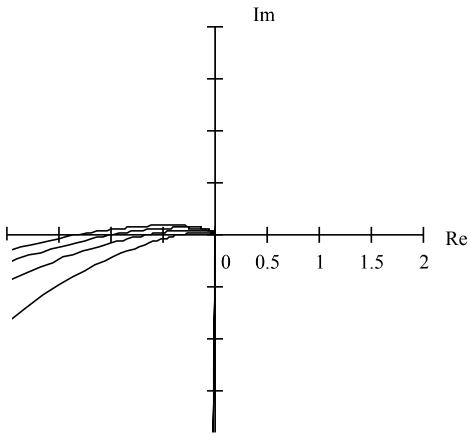
4) Application : axe numérique

a) Régulation Proportionnelle

Régulateur "P" : Tracé de K*H(Omega)



Régulateur "P" : Tracé de K*H(Omega)



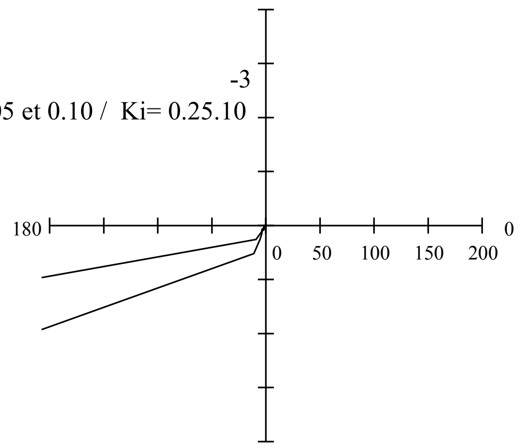
K= 0.25, 0.50, 0.75 et 1

<u>La limite de stabilité pour un régulateur "P" est bien de 0.75.</u>

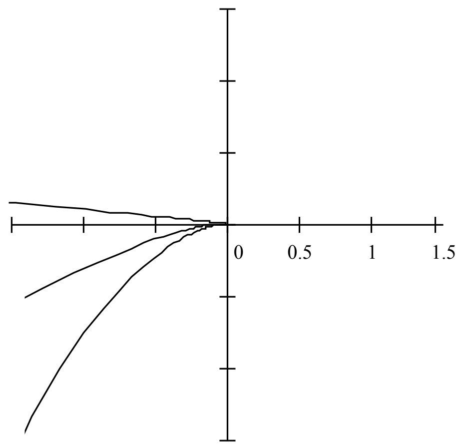
b) Régulation Proportionnelle et Intégrale

Régulateur "PI" : Tracé de PI*H(Omega)

Kp = 0.05 et 0.10 / $Ki= 0.25.10^{-3}$

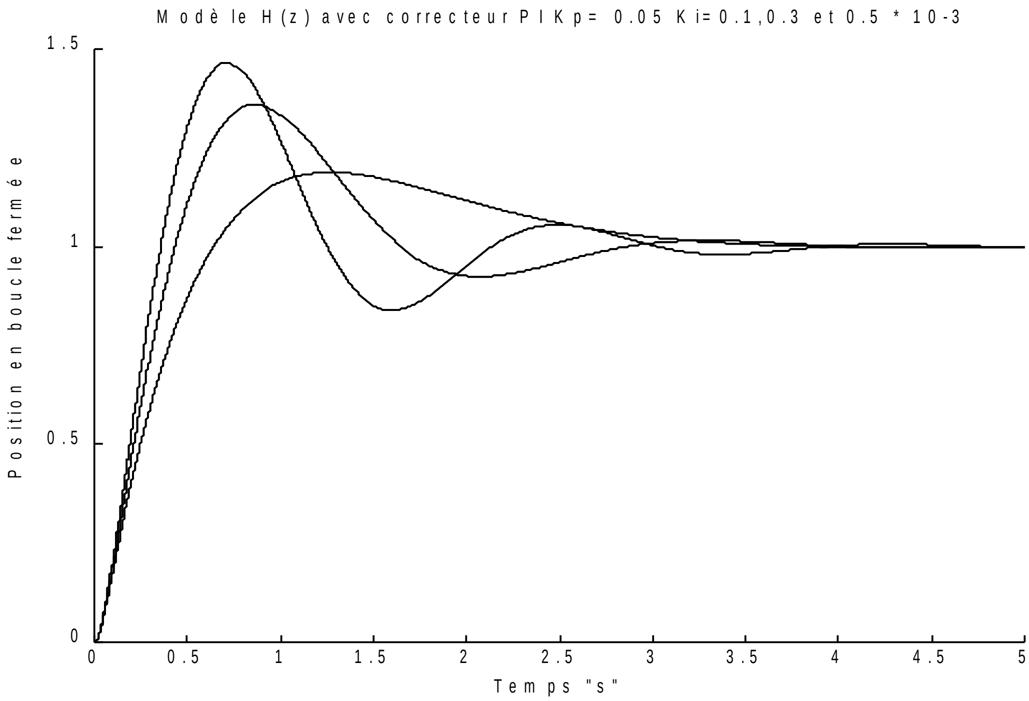


Kp = 0.05 / $Ki= 0.25, 1.5 \text{ et } 4 .10^{-3}$



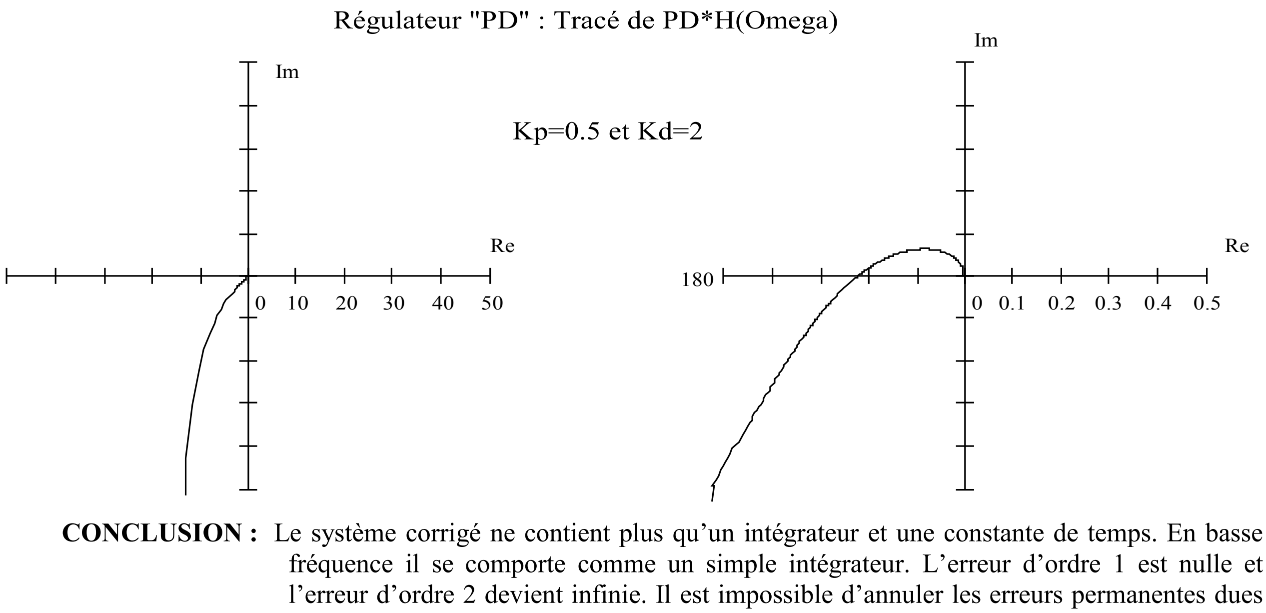
CONCLUSION : Le système contient bien deux intégrateurs et une constante de temps. En basse fréquence il se comporte comme un double intégrateur (phase = - 180°) et en haute fréquence comme un triple intégrateur (phase = - 270°)

Il faut régler à la fois Kp et Ki. Plus Ki et Kp augmentent, plus le système est instable. Un couple de valeur Kp=0.05 et Ki=$0.30*10^{-3}$ donne un système stable et annule l'erreur permanente d'ordre 2.



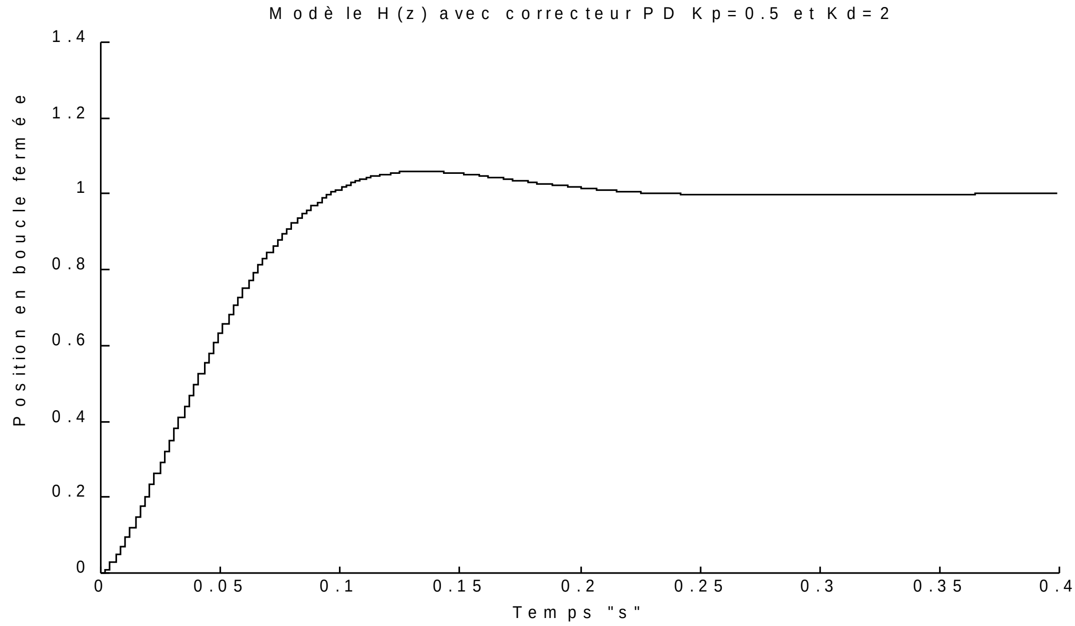
Le régulateur PI intervient pour le régime permanent mais rend la dynamique du système très lente. Il est utilisé pour les régulations autour d'un point de consigne fixe.

b) Régulation Proportionnelle et Dérivée

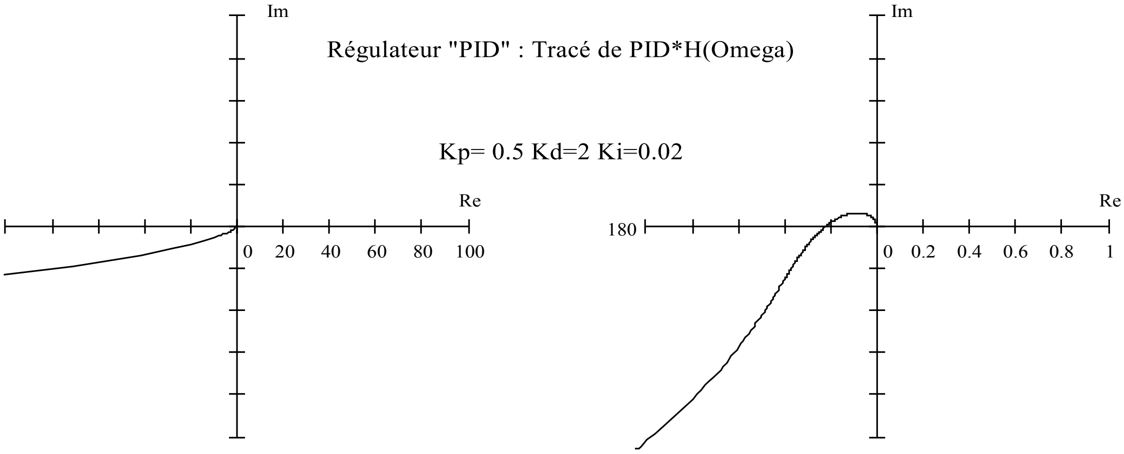


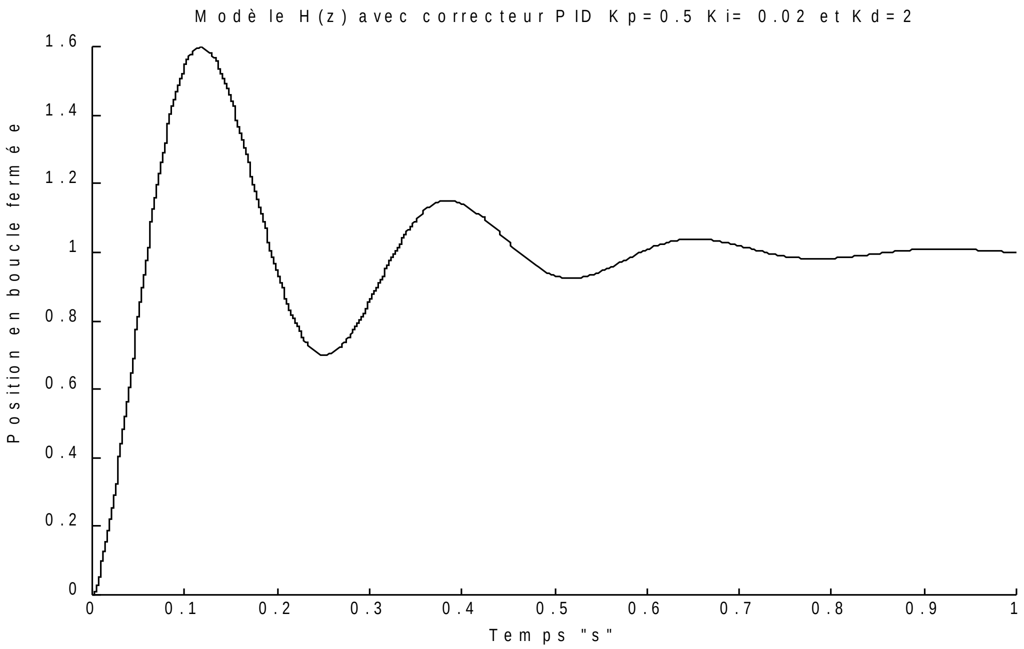
CONCLUSION : Le système corrigé ne contient plus qu'un intégrateur et une constante de temps. En basse fréquence il se comporte comme un simple intégrateur. L'erreur d'ordre 1 est nulle et l'erreur d'ordre 2 devient infinie. Il est impossible d'annuler les erreurs permanentes dues aux perturbations;

Par contre la dynamique est plus grande. On peut donc utiliser ce correcteur pour suivre une consigne qui varie rapidement.



c) Régulation Proportionnelle Intégrale et Dérivée





d) Influence de la période d'échantillonnage

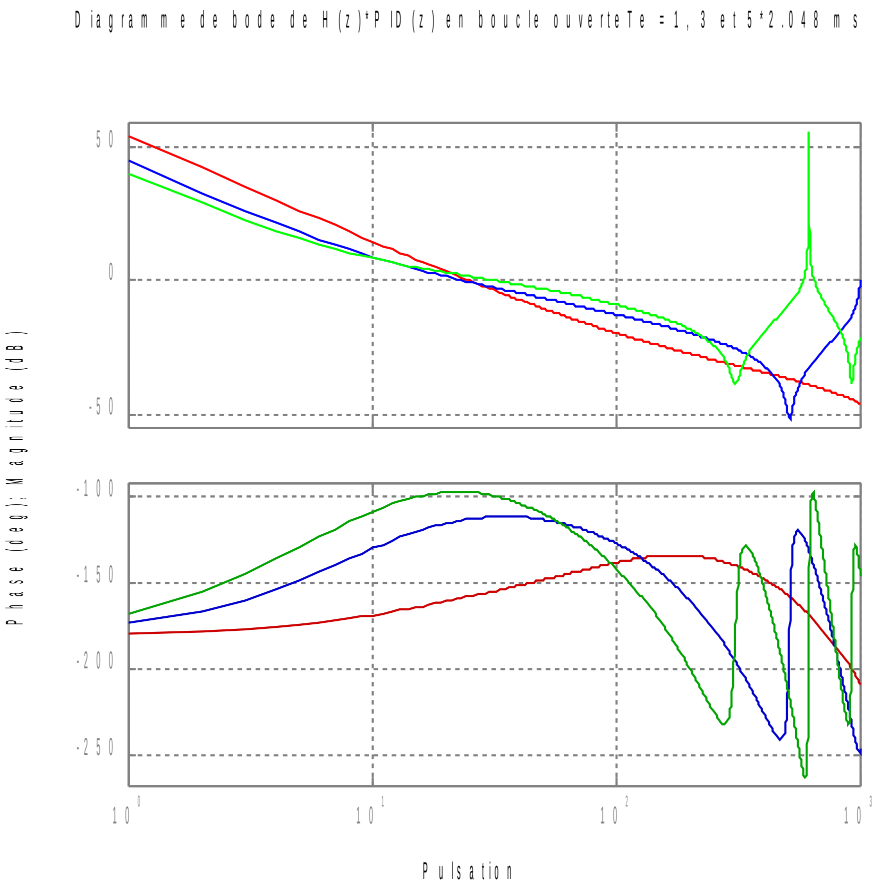
Le choix des constantes de temps du correcteur continu équivalent (Tn, Ti, Td) est lié uniquement aux constantes de temps du processus analogique à corriger.

Dans les formules précédentes (page 5) on voit que les **coefficients Ki, Kp et Kd dépendent de Te**.

Si on change période d'échantillonnage et que l'on veut garder le même réglage il faut donc **changer les valeurs de Ki, Kd et Kp**.

Le diagramme de Bode ci-dessous est obtenu en **changeant uniquement la période d'échantillonnage** et en gardant constantes les valeurs de Ki, Kp et Kd. Le correcteur n'agit plus aux mêmes fréquence par rapport aux fréquences de coupures du système analogique non corrigé : la zone utile du spectre du correcteur se rapproche la fréquence de Shannon.

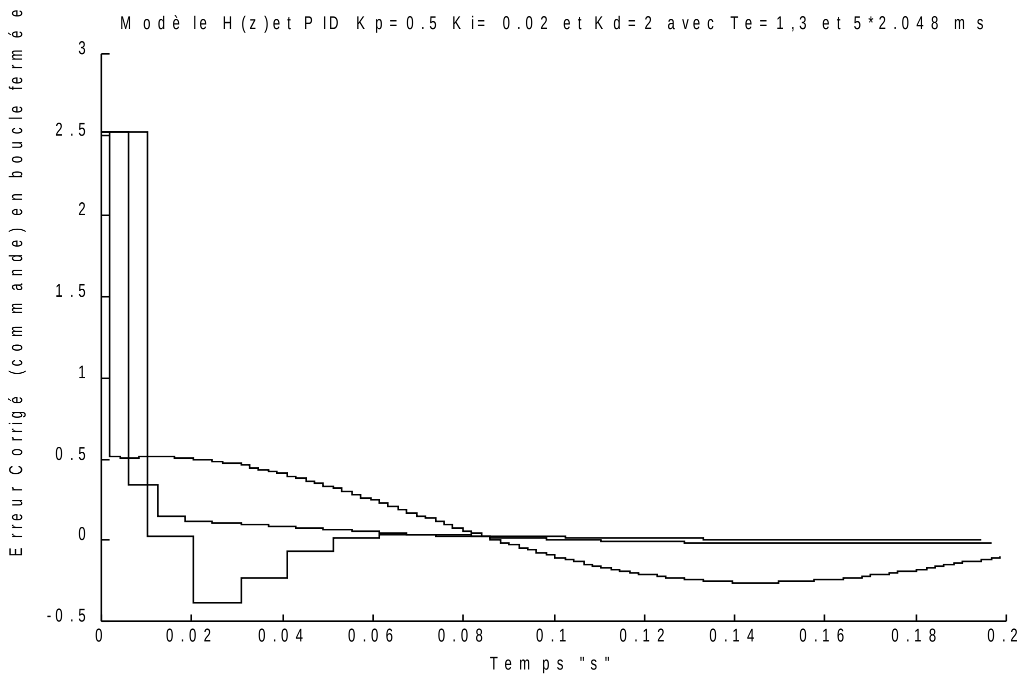
<u>Un changement de fréquence d'échantillonnage doit s'accompagner d'un nouveau calcul des coefficients Ki, Kp et Kd</u>



e) Etude du signal de commande : l'erreur corrigée.

Il faut surveiller le signal de sortie du régulateur. On appelle ce signal soit la commande, soit l'erreur corrigée. Il faut s'assurer que cette commande n'est pas trop forte car il y a un risque de saturation du CNA. Le système a alors un comportement non linéaire.

La figure ci-dessous correspond au signal de commande de l'axe numérique avec le correcteur PID dont on fait varier la période d'échantillonnage dans les mêmes conditions que ci dessus.

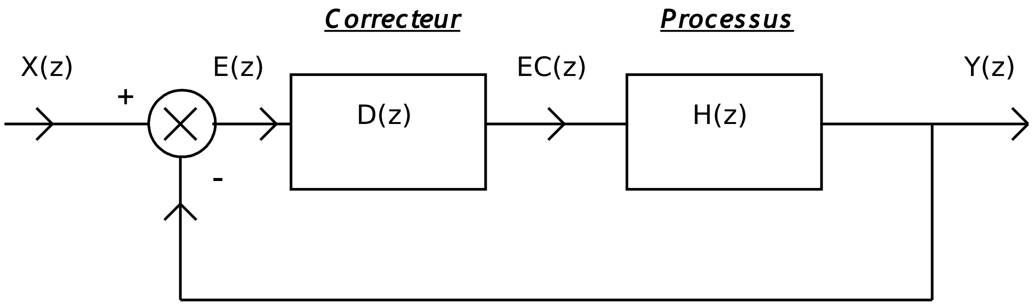


CONCLUSION __**Le réglage d'un PID numérique peut se faire par des méthodes analogues à celles d'un système continu en tenant compte de Te et en s'assurant que le signal de commande n'est pas saturé.**__

B) Correcteurs polynomiaux : Placement de pôles

1) Principe général de la méthode.

a) Forme générale d'un système bouclé.



On pose :

D(z) =Dn(z)/Dd(z)   H(z)=Hn(z)/Hd(z)   T(z)=D(z).H(z)=Tn(z)/Td(z)
Tn(z)=Dn(z).Hn(z)   Td(z)=Dd(z).Hd(z)

Chacun des termes Dn(z), Dd(z), Hn(z) ... est un polynôme en "z".
Le degré du numérateur Dn(z) est toujours inférieur ou égal au degré du dénominateur Dd(z).

b) Principe de la méthode.

Le principe de la méthode du placement des pôles est de déplacer les pôles de la fonction de transfert du processus. On pose donc :

Dn(z) = K.Hd(z)   K est un coefficient de proportionnalité pour que le système reste stable et amorti en boucle fermée.

Cette méthode s'applique bien aux systèmes du second ordre. Elle devient plus délicate lorsque l'ordre du système augmente. Cette étude en dehors du cadre de ce cours.

Si on veut annuler les erreurs permanentes d'ordre un ou deux, il faudra ajouter autant de termes de type intégral que nécessaire.

La fonction de transfert du système global en boucle ouverte devient :

$$\boxed{T(z) := K\cdot\frac{Hn(z)}{Dd(z)}}$$

Le degré de cette fonction de transfert est maintenant égal à celui du dénominateur du correcteur. Le système gagne alors en stabilité.

2) Règles d'application de la méthode

Après avoir compensé les pôles il faut régler la valeur de K et ajouter le nombre d'intégrateurs nécessaires à l'annulation de l'erreur permanente. Ces réglages dépendent de la forme de la fonction de transfert initiale.

a) Système sans intégrateur

Dn(z) = K.Hd(z) Il faut compenser tous les pôles de H(z). Le degré du numérateur Dn(z) est donc égal au degré du dénominateur Hd(z).

Il faut annuler au moins l'erreur d'ordre 1. Il faut donc au moins un terme "z - 1" au dénominateur du correcteur.

Exemple : Soit un système continu de gain statique un, comportant deux constantes de temps et commandé par bloqueur d'ordre zéro.

$$H(p) := \frac{1}{(1+T1\cdot p)\cdot(1+T2\cdot p)} \qquad H(z) := \frac{z-1}{z}\cdot Z\left(\frac{H(p)}{p}\right)$$

$$H(z) := \frac{d1\cdot z + d0}{(z-z1)\cdot(z-z1)} \qquad z1 := e^{-\frac{Te}{T1}} \qquad z2 := e^{-\frac{Te}{T2}}$$

$$d1 := \frac{T1}{T1-T2}\cdot(1-z1) - \frac{T2}{T1-T2}\cdot(1-z2) \qquad d0 := \frac{T2}{T1-T2}\cdot(1-z2)\cdot z1 - \frac{T1}{T1-T2}\cdot(1-z1)\cdot z2$$

Pour compenser les pôles de H(z) il faut donc que le numérateur soit un polynôme du second degré en "z". Il est possible de choisir pour D(z) un correcteur PID. Pour simplifier les calculs il vaut mieux prendre la forme suivante pour ce régulateur :

$$D(z) := \frac{A\cdot z^2 + B\cdot z + C}{z\cdot(z-1)} \qquad A\cdot z^2 + B\cdot z + C := K\cdot(z-z1)\cdot(z-z2)$$

On arrive donc à :

A = K B = - K.(z1 + z2) C = K.z1.z2

En revenant à la forme initiale du correcteur PID on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} Kp = K(z1 + z2 - 2.z1.z2) \\ Ki = K.(1 - z1 - z2 + z1.z2) \\ Kd=K.z1.z2 \end{array}}$$

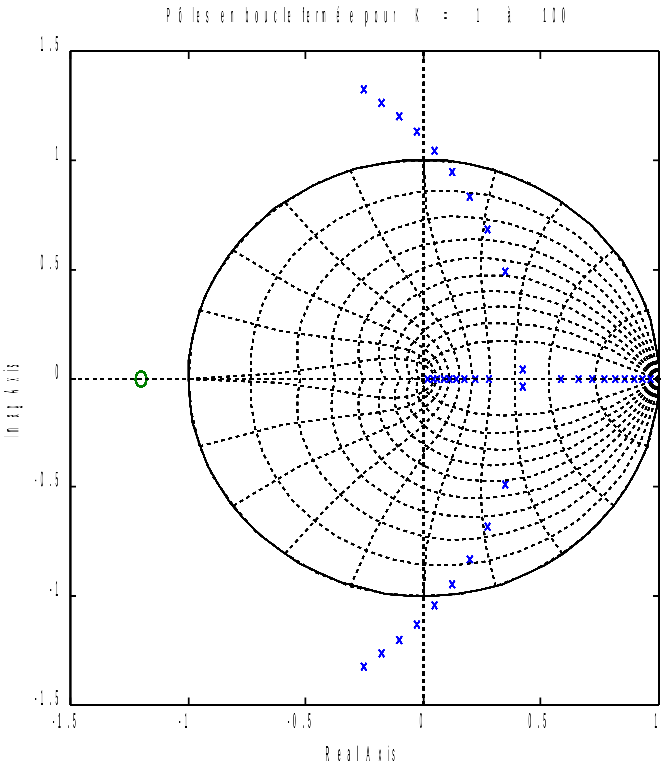
Les valeurs de z1 et z2 sont directement liées aux constantes de temps du processus et à la période d'échantillonnage. Donc dans ces formules le seul paramètre de réglage est le gain "K".

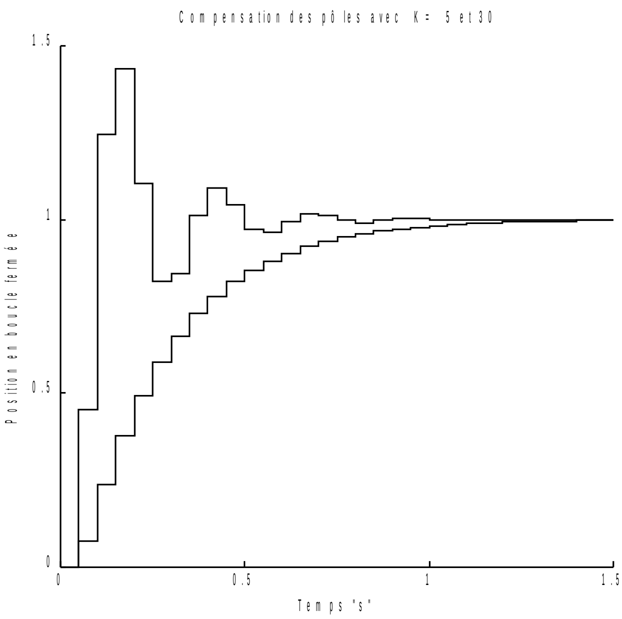
La fonction de transfert à régler est donc la suivante :

$$\boxed{T(z) := K \cdot \frac{d1 \cdot z + d0}{z \cdot (z - 1)}}$$

<u>K permet de régler directement l'amortissement du système</u>

EXEMPLE Soit un système tel que T1=1s, T2=0.1s et Te=0.05s le lieu de pôles en boucle fermée est le suivant quand K varie de 10 à 100.





b) *Système avec un intégrateur*

Le dénominateur de H(z) peut se mettre sous la forme Hd(z) = (z - 1).Hd0(z).

Dn(z) = K.H0d(z)   Il garder le terme intégral et compenser les autres les pôles de H(z). Le degré du numérateur Dn(z) est donc égal au degré du dénominateur Hd(z) moins un.

Comme il y a déjà une intégration dans la boucle on peut choisir un régulateur de type PD. Il est aussi possible de rajouter une seconde intégration avec un régulateur PID.

Nous pouvons prendre par exemple le cas de l'axes numérique étudié précédemment. Si on pose avec $\alpha = e^{-Te/\tau}$ nous avons vu que la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système pouvait se mettre sous la forme :

$$H(z) := H1 \cdot \frac{a \cdot z + b}{(z-1) \cdot (z-\alpha)}$$

D'autre part, un correcteur proportionnel et dérivé peut se mettre sous la forme :

$$D(z) := Kp + Kd \cdot \frac{z-1}{z} \qquad D(z) := K \cdot \frac{z-B}{z}$$

$$K := Kp + Kd \qquad B := \frac{Kd}{Kp + Kd}$$

Pour choisir Kd et Kp il faut donc poser $B = \alpha = e^{-Te/\tau}$ et K0 = K.H1

Le système à régler est donc:

$$\boxed{T(z) := K0 \cdot \frac{a \cdot z + b}{z \cdot (z-1)}}$$

Le réglage de ce type de régulateur devient alors identique au précédent. Si on s'impose une valeur pour K0 un calcul rapide conduit à :

$$\boxed{Kd := \alpha \cdot \frac{K0}{H1} \qquad Kp := (1-\alpha) \cdot \frac{K0}{H1}}$$

C) Régulateur à temps d'établissement fini : réponse Pile

Ce paragraphe présente le principe d'une commande à réponse Pile. Il n'a pas la prétention d'être un cours complet sur ce sujet. Il présente simplement le principe d'une réponse Pile. Une étude complète sur ce sujet déborde largement du cadre de ce cours.

1) Notion de réponse à temps d'établissement fini.

Soit y(n) la suite des échantillons de la réponse impulsionnelle d'un système et la transformée en "z" correspondante. Cette suite peut être infinie ou finie et ne comporter que "N" échantillons. On a alors :

$$Y(z) := \sum_{n=0}^{\infty} y(n) \cdot z^{-n} \qquad \text{ou} \qquad Y(z) := \sum_{n=0}^{N} y(n) \cdot z^{-n}$$

Dans le cas d'une suite finie Y(z) peut se mettre sous la forme :

$$Y(z) = y_0 + y_1.z^{-1} + y_2.z^{-2} + y_3.z^{-3} + ... + y_{N-1}.z^{-N+1} + y_N.z^{-N}$$
$$Y(z) = (y_0.z^N + y_1.z^{N-1} + y_2.z^{N-2} + y_3.z^{N-3} + ... + y_{N-1}.z + y_N)/z^N$$

Nous avons montré que la transformée en "z" de la réponse impulsionnelle d'un système discret correspond à sa fonction de transfert. La fonction Y(z) ci-dessus est constituée d'un polynôme en "z" divisé par z^N. Cette fonction comprend donc un pôle multiple d'ordre "N" à l'origine.

$$\boxed{Y(z) := \frac{P(z)}{z^N}}$$

Réciproquement tout système qui possède un pôle multiple à l'origine a une réponse impulsionnelle finie constituée de "N" valeurs. On parle de réponse "PILE".

2) Régulateur à réponse Pile.

a) Principe général.

Pour spécifier un régulateur à réponse PILE il définir :

- La nature de la suite des échantillons d'entrée qui produit une réponse pile.
- La suite des échantillons de sortie obtenus pour l'entrée choisie.
- La présence ou non d'intégrateurs qui annulent l'erreur permanente.

La fonction de transfert ci-dessus correspond à la fonction de transfert en boucle fermée du système complet.

Il faut donc exprimer le correcteur D(z) en fonction de la fonction de transfert H(z) du système, de la suite des échantillons d'entrée et de la suite des échantillons de sortie.

b) Calcul du correcteur D(z)

Pour la suite on suppose que le signal d'entrée x(n) est un échelon et que cette entrée produit la suite des échantillons y(n) en boucle fermée. La fonction de transfert en boucle fermée est donc donnée par :

$$T\_bf(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad X(z) := \frac{z}{z-1} \qquad T\_bf(z) := \frac{T\_bo(z)}{1+T\_bo(z)}$$

T_bf(z) indique la fonction de transfert en boucle fermée. T_bo(z) indique la fonction de transfert en boucle ouverte. On peut écrire que T_bo(z) = D(z).H(z) où D(z) est la fonction de transfert du correcteur et H(z) celle du système en boucle ouverte.

$T\_bf(z) = Y(z).(z - 1)/z$ $T\_bf(z) = Y(z).(1 - z^{-1})$

$T\_bf(z) = (y_0 + y_1.z^{-1} + y_2.z^{-2} + y_3.z^{-3} + ... + y_{N-1}.z^{-N+1} + y_N.z^{-N}).(1 - z^{-1})$

Le système analogique est d'un ordre supérieur à deux et on suppose qu'il n'y a pas de discontinuité sur la sortie.

A l'état initial la sortie est au repos donc y_0=0 et à l'état final la sortie suit l'entrée donc y_N=1. On a donc :

$T\_bf(z) = y_1.z^{-1} + (y_2 - y_1).z^{-2} + (y_3 - y_2).z^{-3} + ... + (y_{N-1} - y_{N-2}).z^{-N+1} + (1 - y_{N-1}).z^{-N}$

$T\_bf(z) = [y_1.z^{N-1} + (y_2 - y_1).z^{N-2} + (y_3 - y_2).z^{N-3} + ... + (y_{N-1} - y_{N-2}).z + (1 - y_{N-1})]/z^N$

Si on pose $p(z) = p_{N-1}.z^{N-1} + p_{N-2}.z^{N-2} + p_{N-3}.z^{N-3} + ... + p_1.z + p_0$

$$\boxed{T\_bf(z) := \frac{P(z)}{z^N}}$$

P(z) est un polynôme en "z" de degré "N-1". Les coefficient de P(z) dépendent de la forme de réponse indicielle du système. Les réponses impulsionnelles et indicielles en boucle fermée sont donc à temps d'établissement fini.

Connaissant le polynôme P(z) de la formule ci-dessus on peut déduire la forme du correcteur D(z).

$$\boxed{D(z) := \frac{P(z)}{H(z)\cdot\left(z^N - P(z)\right)}}$$

On constate sur celle formule que le correcteur D(z) doit compenser complètement les pôles et les zéros de H(z). Eventuellement on peut garder ou ajouter des termes de type intégrateur pour annuler les erreurs permanentes.

Il faut s'assurer que ce correcteur est toujours réalisable et ne conduit pas un filtre non causal.

<u>Le degré du dénominateur en "z" Dd(z) doit être supérieur ou égal au degré du numérateur Dn(z).</u>

La théorie générale est beaucoup plus complexe que ce simple calcul.

c) Exemple

Supposons que sur un signal d'entrée en échelon on veuille que la sortie en boucle fermée soit une rampe unité de trois échantillons non nuls N=3.

$y_0=0$ $\quad$ $y_1=1/3$ $\quad$ $y_2=2/3$ $\quad$ $y_3=1$

$Y(z) = 1/3\ z^{-1} + 2/3\ z^{-2} + 1.\ z^{-3}$

$$T\_bf(z) := \frac{P(z)}{z^N} \qquad T\_bf(z) := \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2 + z + 1}{z^3}$$

$$P(z) := \frac{1}{3}\cdot\left(z^2 + z + 1\right) \qquad D(z) := \frac{P(z)}{H(z)\cdot\left(z^N - P(z)\right)}$$

$$\boxed{D(z) := \frac{z^2 + z + 1}{H(z)\cdot\left(3.z^3 - z^2 - z - 1\right)}}$$

D) Réalisation pratique du correcteur

Réalisation par calculateur

Le principe de réalisation d'un correcteur numérique est le même que celui d'un filtre numérique. Il faut :

- transformer le numérateur et le dénominateur de D(z) pour faire apparaître les puissances de "z^{-1}". Chaque terme "z^{-n}" correspond à un retard d'une période d'échantillonnage.
- calculer l'action EC_n par les équations de récurrence faisant apparaître les termes E_n, E_{n-1}, E_{n-2}, ... , EC_{n-1} , EC_{n-2} , EC_{n-3} ...
- comme pour un filtre récursif appliquer l'algorithme ci-dessous :

REPETER SANS FIN
DEBUT
Lire la consigne Xn.
Lire la mesure Yn.
Calculer l'erreur En = Xn - Yn.
Calculer l'action ECn= f(En, En1, En2 ... ECn1 ECn2 ECn3 ...)
Mettre à jour le CNA.
Mettre à jour les échantillons précédents (En1 En2 En3 ... ECn1, ECn2 ...)
Appel de temporisation pour régler la période d'échantillonnage.
FIN